g est dérivable sur $]0;1[$ et Ψ est dérivable sur IR qui contient $g(]0;1[) \Rightarrow$ la fonction qui a $x \mapsto \Psi(g(x))$ est dérivable sur $]0;1[$
En conclusion F est dérivable sur $]0;1[$.

$$\forall x \in]0;1[; F'(x)=g'(x)\cdot\Psi'[g(x)]=\frac{1}{x(1-x^2)}\cdot\overbrace{f[g(x)]}^{x}=\frac{1}{1-x^2}$$

2/a- $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\Psi\left(g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-\Psi(0)=\Psi(0)-\Psi(0)=0.$

$$\forall x \in]0;1[; F'(x)=\frac{1}{1-x^2}.$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0;1[; F(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\text{Log}(1+t)-\text{Log}(1-t)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}$$

$$=\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

b- $\cdot \lim_{x\to 0^+} F(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

$$=-\text{Log}\left(1+\sqrt{2}\right)=F(0)$$

$\Rightarrow$ F est continue à droite en 0.

$\cdot \lim_{x\to 0^-} F(x)=\lim_{z\to 0^+} F(-z)$ avec $z=-x; x\to 0^-; z\to 0^+$.

$$=\lim_{z\to 0^+} F(z)=F(0) \quad \text{car F est paire.}$$

$\Rightarrow$ F est continue à gauche en 0.

Conclusion : F est continue en 0.

$$\cdot \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{Log}(1+x)-\text{Log}(1-x)}{x}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{Log}(1+x)}{x}\right]+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\text{Log}(1+(-x))}{(-x)}\right]$$

$$(X=-x; x\to 0^+, X\to 0^-)$$

$$=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}1=1$$

$\Rightarrow$ F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0)=1$.

$$\cdot \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right]=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{F(t)-F(0)}{-t-0}\right]$$

$$(\text{avec } t=-x; x\to 0^-; t\to 0^+)$$

$$=-\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{F(t)-F(0)}{-t-0}\right]=-1$$

$\Rightarrow$ F est dérivable à gauche en 0 et $F'_g(0)=-1$

Conclusion : F n'est pas dérivable en 0 car $F'_d(0)\neq F'_g(0)$.

c- F est dérivable sur $]0;1[$ et $\forall x \in]0;1[; F'(x)=\frac{1}{1-x^2}$

D'où le tableau de variation de F sur $[0;1[$.